

**CEFET/RJ - Cálculo a Várias Variáveis**  
**Professor: Roberto Thomé**  
**e-mail: roberto.thome@cefet-rj.br**  
**homepage: www.rcthome.pro.br**

**LISTA DE EXERCÍCIOS 01**

1) Seja  $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ . Então :

- (a) Calcule  $f(0, 0)$ ,  $f(2, 0)$  e  $f(0, 3)$ .
- (b) Determine e esboce o domínio de  $f$ .
- (c) Determine a imagem de  $f$ .
- (d) Esboce as curvas de nível para  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $z = 2$  e  $z = 6$ .
- (e) Esboce o gráfico de  $f$ .
- (f) Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x, y)$ .

2) Seja  $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ . Então:

- (a) Calcule  $f(1, 0)$  e  $f(4, 9)$ .
- (b) Determine e esboce o domínio de  $f$ .
- (c) Determine a imagem de  $f$ .
- (d) Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} f(x, y)$ .

3) Considere  $f(x, y) = \frac{3x+5y}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$ . Então:

- (a) Determine e esboce o domínio de  $f(x, y)$ .
- (b) Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} f(x, y)$ .

4) Considere  $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + 9y^2}$ .

- (a) Calcule  $f(1, 0)$  e  $f(0, -1)$ .
- (b) Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} f(x, y)$ .
- (c) Determine o domínio de  $f$ .
- (d) Determine a imagem de  $f$ .
- (e) Esboce as curvas de nível para  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $z = 2$  e  $z = 3$ .
- (f) Esboce o gráfico de  $f(x, y)$ .

5) Considere  $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ .

- (a) Determine e esboce o domínio de  $f(x, y)$ .
- (b) Determine a imagem de  $f$ .
- (c) Esboce as curvas de nível para  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $z = 2$  e  $z = 3$ .
- (d) Calcule  $f(1, 2)$ .
- (e) Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

6) Determine e faça o esboço do domínio das função:

- (a)  $f(x, y) = \frac{9-x^2-y^2}{\sqrt{y-x^2}}$ .
- (b)  $f(x, y) = \sqrt{x+y}$ .
- (c)  $f(x, y) = \ln(x-y)$ .
- (d)  $f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$ .
- (e)  $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$ .
- (f)  $f(x, y) = \frac{x-3y}{x+3y}$ .

7) Esboce o gráfico das função:

- (a)  $f(x, y) = 1$ .
- (b)  $f(x, y) = 3 - x$ .
- (c)  $f(x, y) = 2 - y$ .
- (d)  $f(x, y) = 1 - x - y$ .
- (e)  $f(x, y) = 1 + y^2$ .
- (f)  $f(x, y) = 4 - x^2$ .
- (g)  $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ .
- (h)  $f(x, y) = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- (i)  $f(x, y) = 1 + \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ .
- (j)  $f(x, y) = 2 - \sqrt{4 - (x-1)^2 - (y-2)^2}$ .
- (k)  $f(x, y) = \sqrt{y-1}$ .
- (l)  $f(x, y) = e^{y-1}$ .
- (m)  $f(x, y) = |x|$ .

8) Mostre que para cada função  $f$  dada,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  não existe:

a) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$	b) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$	c) $f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^2-y^3}$
d) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$	e) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$	f) $f(x,y) = \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$
g) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$	h) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$	i) $f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$
j) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^3-y^2}$	k) $f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$	l) $f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$
m) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2-y^3}$	n) $f(x,y) = \frac{x^3y^4}{x^3y^4+(y-x^4)^3}$	o) $f(x,y) = \frac{x^{12}y^{12}}{(x^3+y^{12})^5}$

9) Considere a função  $f(x,y) = 3x^2 - 5y^2 + 7xy + 2x - 4y - 3$ :

- Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
- Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0)$
- Calcule  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$
- Calcule  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-1)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1,1)$

10) Considere a função  $f(x,y) = 3x^2 - 5y^2 + 3xy - 2x + 9y - 1 + \cos(x) - \sin(y)$ . Calcule:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

11) Considere a função  $f(x,y) = e^{(x^2+y^2)} + \cos(xy) + x^3 - 5y^3 + 10$ . Calcule:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

12) Uma função que satisfaz a equação diferencial abaixo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

é dita uma função harmônica. Mostre que a função abaixo é harmônica:

$$f(x, y) = e^{-x} \cos(y) + e^{-y} \cos(x).$$

13) Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função:

a) $f(x, y) = 3x^5 - 4x^2y^3 + y - 1$	e) $f(x, y) = (3x^2 + 5y)^4$	i) $f(x, y, z) = 5x^2y^3z$
b) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$	f) $f(x, y) = \sqrt{x+y^2}$	j) $f(x, y, z) = e^{xyz}$
c) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y)$	g) $f(x, y) = \cos(x^3 + y^3)$	k) $f(x, y, z, w) = 2x^2z + 5yw^3$
d) $f(x, y) = xe^{(x^2+y^2)}$	h) $f(x, y) = \operatorname{tg}(x + \sqrt{y})$	l) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

14) Encontre a equação do plano tangente à superfície no ponto especificado:

- a)  $z = x^2 + y^2$ ,  $P = (1, 2)$ .
- b)  $z = x^2 - y^2$ ,  $P = (-1, 0)$ .
- c)  $z = \sqrt{9 - 5x^2 - 3y^2}$ ,  $P = (1, -1)$ .
- d)  $z = \cos(x^2 - y^2)$ ,  $P = (1, -1)$ .

15) Determine a derivada direcional da função  $f$  no ponto  $P$  na direção do vetor  $\vec{v}$ :

- (a)  $f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}$ ,  $P = (3, 4)$ ,  $\vec{v} = (4, -3)$
- (b)  $f(x, y) = \frac{x}{y}$ ,  $P = (6, -2)$ ,  $\vec{v} = (-1, 3)$
- (c)  $f(x, y) = xe^{-2y}$ ,  $P = (5, 0)$ ,  $\vec{v} = (0, 2)$
- (d)  $f(x, y, z) = z^3 - x^2y$ ,  $P = (1, 6, 2)$ ,  $\vec{v} = (3, 4, 12)$
- (e)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $P = (1, 2, -2)$ ,  $\vec{v} = (-6, 6, -3)$

16) Use a **Regra da Cadeia** para determinar  $\frac{dv}{dt}$ :

(a)  $v = x^2y + xy^2$ , com  $x = 2 + t^4$  e  $y = 1 - t^3$

(b)  $v = x \ln(x + 2y)$ , com  $x = \text{sen}(t)$  e  $y = \text{cos}(t)$

(c)  $v = xe^{y/z}$ , com  $x = t^2$ ,  $y = 1 - t$  e  $z = 1 + 2t$

(d)  $v = z^3 - x^2y$ , com  $x = e^{t^2}$ ,  $y = e^{-2t}$  e  $z = \ln(t)$

(e)  $v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$ , com  $x = 3t$ ,  $y = -5t$ ,  $z = t$  e  $w = -t$

17) Use a **Regra da Cadeia** para determinar  $\frac{\partial s}{\partial u}$  e  $\frac{\partial s}{\partial v}$ :

(a)  $s = x^2y + xy^2$ , com  $x = uv$  e  $y = u - v$

(b)  $s = x \ln(x + 2y)$ , com  $x = u^2v$  e  $y = uv^2$

(c)  $s = xe^{y/z}$ , com  $x = 2\text{cos}(u)$ ,  $y = 3\text{sen}(v)$  e  $z = \text{sen}(u)\text{cos}(v)$

(d)  $s = z^3 - x^2y$ , com  $x = u + v \ln(u)$ ,  $y = u^2 - v \ln(v)$  e  $z = u^2 - v^2$

(e)  $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$ , com  $x = u + v$ ,  $y = u - v$ ,  $z = uv$  e  $w = u/v$

18) Encontre todos os máximos locais, mínimos locais e pontos de sela das funções abaixo:

(a)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$

(b)  $f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6$

(c)  $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$

(d)  $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4$

(e)  $f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$

(f)  $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

(g)  $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$

(h)  $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

(i)  $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 9x^2 + 3y^2 - 12y$

(j)  $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$

19) Um vendedor de produtos alimentícios estabelece um modelo que relaciona o lucro  $L$  obtido com as quantidades  $T$  e  $R$  gastas respectivamente com propaganda de televisão e revistas regido pela fórmula  $L = TR(12 - 4T - 3R)$ , onde  $L$ ,  $T$  e  $R$  se expressam em centenas de milhares de reais. Quanto deveria ser gasto com cada tipo de propaganda de modo a maximizar o lucro?

\* **Resposta** : R\$100.000,00 com televisão e R\$133.333,33 com revista

20) O gráfico de  $g(x, y) = \frac{1}{xy}$  é uma superfície  $S$  no  $\mathbb{R}^3$ . Encontre os pontos de  $S$  mais próximos da origem.

\* **Resposta** :  $P_1 = (-1, -1, 1)$ ,  $P_2 = (-1, 1, -1)$ ,  $P_3 = (1, -1, -1)$  e  $P_4 = (1, 1, 1)$

21) (**Posicionando um Radiotelescópio**) Você está encarregado de construir um radiotelescópio em um planeta recentemente descoberto. Para minimizar a interferência, você deseja colocá-lo onde o campo magnético do planeta é mais fraco. O planeta é esférico, com um raio de 6 unidades. Com base em um sistema de coordenadas cuja origem está no centro do planeta, a intensidade do campo magnético é dada por  $M(x, y, z) = 6x - y^2 + xz + 60$ . Onde você posicionaria o radiotelescópio?

\* **Resposta** :  $P_1 = (-4, -4, 2)$  e  $P_2 = (-4, 4, 2)$

22) Com uma chapa retangular de alumínio de  $144m^2$ , deseja-se construir uma caixa retangular sem tampa com maior volume possível. Determine as dimensões e o volume dessa caixa.

\* **Resposta** : Base quadrada com lado igual a  $4\sqrt{3}$  m e altura igual a  $2\sqrt{3}$  m ;  
volume =  $96\sqrt{3} m^3$

23) Com uma chapa retangular de alumínio de  $144m^2$ , deseja-se construir uma caixa retangular com tampa com maior volume possível. Determine as dimensões e o volume dessa caixa.

\* **Resposta** : Cubo com aresta igual a  $2\sqrt{6}$  m ; volume =  $48\sqrt{6} m^3$

24) Uma caixa retangular sem tampa deve ter um volume de  $32.000 cm^3$ . Determine as dimensões que minimizem a quantidade de papelão utilizado.

\* **Resposta** : Base quadrada com lado igual a 40 cm e altura igual a 20 cm ;

25) Encontre as dimensões de um paralelepípedo retangular de maior volume que pode ser inscrito na esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ . Determine também o volume desse paralelepípedo.

\* **Resposta** :  $a = 4$  ( $x = 2$ ) ,  $b = 4$  ( $y = 2$ ) e  $c = 4$  ( $z = 2$ ) ; volume = 64

26) Encontre as dimensões de um paralelepípedo retangular de maior volume que pode ser inscrito no elipsóide  $9x^2 + 4y^2 + 16z^2 = 144$ . Determine também o volume desse paralelepípedo.

\* **Resposta** :  $a = \frac{8\sqrt{3}}{3}$  ( $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ) ,  $b = 4\sqrt{3}$  ( $y = 2\sqrt{3}$ ) e  $c = 2\sqrt{3}$  ( $z = \sqrt{3}$ ) ;  
volume =  $64\sqrt{3}$

27) Encontre as dimensões de uma lata cilíndrica com tampa que tenha 1 litro de volume e que use a menor quantidade de material.

\* **Resposta** : raio igual a  $\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$  e altura igual a  $\frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}$

28) Suponha que a temperatura em um ponto  $(x, y)$  de uma placa de metal é dada pela função  $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$ . Uma formiga, andando sobre a placa, percorre um círculo de raio 5 centrado na origem. Qual é a maior e a menor temperatura encontrada pela formiga?

\* **Resposta** : A maior temperatura foi 125 e a menor foi 0