CEFET/RJ - Cálculo Vetorial
Professor: Roberto Thomé
e-mail: roberto.thome@cefet-rj.br
homepage: www.rcthome.pro.br

LISTA DE EXERCÍCIOS 02

(1) Calcule o **Rotacional** e o **divergente** de cada campo vetorial abaixo. Diga quais são conservativos:

a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x+y\ ,\ y-x\ ,\ xz)$

b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (2x-yz\ ,\ 2y-xz\ ,\ 2z-xy)$

c) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^2z\ ,\ xy^2\ ,\ z^2)$

d) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (3y^2z^3\ ,\ 9x^2yz^2\ ,\ -4xy^2)$

e) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xy\ ,\ yz\ ,\ xz)$

f) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x-2z\ ,\ x+y+z\ ,\ x-2y)$

g) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (yz\ ,\ xz\ ,\ xy)$

h) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x\ ,\ y\ ,\ z)$

i) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (2xy\ ,\ x^2+2yz\ ,\ y^2)$

j) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xy^2z^3\ ,\ 2x^2yz^3\ ,\ 3x^2y^2z^2)$

l) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (e^x\ ,\ e^z\ ,\ e^y)$

m) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (yze^{xz}\ ,\ e^{xz}\ ,\ xye^{xz})$

n) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (e^x seny\ ,\ e^x cosy\ ,\ z)$

o) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\ ,\ \frac{y}{x^2+y^2+z^2}\ ,\ \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$

(2) Utilize o **Teorema de Green** para calcular a integral de linha $\oint_c xydx + x^2y^3dy$, onde c é o triângulo com vértices nos pontos $(0,0),(1,0)$ e $(1,2)$.

* **Resposta** : $\frac{2}{3}$

(3) Utilize o **Teorema de Green** para calcular a integral de linha $\oint_c (x-y)dx + (x+y)dy$, onde c é a circunferência $x^2+y^2=9$.

* **Resposta** : 18π

(4) Utilize o **Teorema de Green** para calcular a integral de linha $\oint_c (e^x + y^2)dx + (e^y + x^2)dy$, onde c é a fronteira da região entre $y = x^2$ e $y = x$.

* **Resposta** : $\frac{1}{30}$

(5) Calcule diretamente a integral de linha $\oint_{-c} \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, na qual **c** é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$ percorrido no sentido anti-horário.

* **Resposta** : -2π

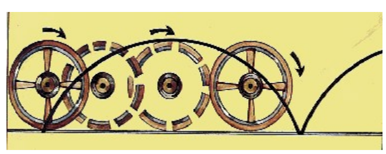
(6) Na questão anterior, foi dado o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

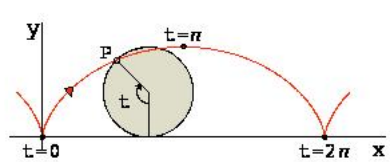
(a) Mostre que $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

(b) Nesse caso temos um campo vetorial $\vec{F}(x,y) = (P,Q)$, onde $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. No entanto esse campo **NÃO é conservativo!** Se de fato esse campo vetorial fosse conservativo, então, pelo Teorema Fundamental da Integral de Linha, a integral de linha da questão anterior deveria ter dado zero (o que não aconteceu). Explique o porque disso ter acontecido.

(c) Explique o porque o **Teorema de Green** não pode ser aplicado na questão anterior.

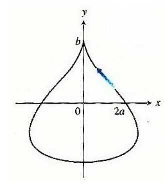
(7) A curva traçada por um ponto P na borda de um círculo quando ele rola ao longo de uma reta é chamada de cicloide. Um arco da cicloide surge quando o ponto P completa uma volta inteira no círculo. Use a fórmula da área dada pelo *Teorema de Green* para encontrar a área sob um arco da cicloide $r(t) = (t - sen(t), 1 - cos(t))$.





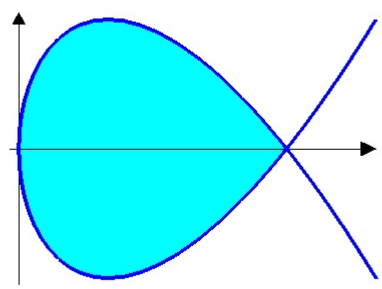
* **Resposta** : 3π

(8) A "Lágrima" é uma curva plana orientada positivamente com equação paramétrica dada por $\mathbf{r}(t) = (2acos(t) - asen(2t), bsen(t))$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, onde a e b são constantes. Utilize a fórmula de área do Teorema de Green para encontrar a área da região delimitada pela curva Lágrima.



* **Resposta** : $2\pi ab$

(9) Use a fórmula da área dada pelo Teorema de Green para encontrar a área da região limitada pela curva $r(t) = \left(t^2, \frac{t^3}{3} - t\right)$ com t no intervalo $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. A curva e a região estão ilustradas na figura abaixo.

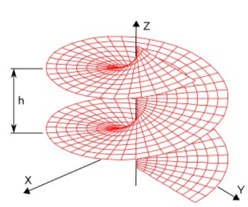


* **Resposta** : $\frac{8\sqrt{3}}{5}$

(10) Calcule a área de parte da superfície S da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

* **Resposta** : $\pi\left[2 - \sqrt{2}\right]$

(11) O Helicóide é uma superfície parametrizada por $\mathbf{s}(r, \theta) = (rcos(\theta), rsen(\theta), \theta)$, com $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Utilize integral de superfície para encontrar a área da superfície do Helicóide.



* **Resposta** : $\pi\left[\sqrt{2} + ln(1 + \sqrt{2})\right]$

(12) Calcule a integral de superfície $\displaystyle\int_S\int xyz\ dS$, onde S é a parte da superfície da esfera $x^2+y^2+z^2=1$ que está acima do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

* **Resposta** : 0

(13) Calcule a integral de superfície $\displaystyle\int_S\int \overrightarrow{F}\cdot dS$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(xy\ ,\ yz\ ,\ xz)$ e S é a superfície do parabolóide $z=4-x^2-y^2$ que está no primeiro octante. Calcule também a área de S.

* **Respostas** : (a) $\frac{8(5\pi+16)}{15}$ (b) $\frac{\pi(17\sqrt{17}-1)}{24}$

(14) Calcule a integral de superfície $\displaystyle\int_S\int \overrightarrow{F}\cdot dS$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(-y\ ,\ x\ ,\ 3z)$ e S é a superfície do plano $15x+3y+5z=15$ que está no primeiro octante. Calcule também a área de S.

* **Respostas** : (a) $-\frac{9}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{259}}{2}$

(15) No exercício anterior, utilize o **Teorema de Stokes** para calcular a integral de linha $\displaystyle\oint_c \overrightarrow{F}\cdot dr$, onde c é a fronteira da superfície S no primeiro octante.

* **Resposta** : 5

(16) Utilize o **Teorema de Stokes** para calcular a integral de linha $\displaystyle\oint_c x^2zdx+xy^2dy+z^2dz$, onde c é a curva da intersecção do plano $3x+2y+z=6$ com o cilindro $x^2+y^2=1$.

* **Resposta** : $\frac{3\pi}{4}$

(17) Utilize o **Teorema de Stokes** para calcular a integral de linha $\displaystyle\oint_c xdx+ydy+(x^2+y^2)dz$, onde c é a fronteira da parte do parabolóide $z=1-x^2-y^2$ que está no primeiro octante.

* **Resposta** : 0

(18) Utilize o **Teorema da Divergência** para calcular a integral de superfície $\displaystyle\int_S\int \overrightarrow{F}\cdot dS$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(3y^2z^3\ ,\ 9x^2yz^2\ ,\ -4xy^2)$ e S é a superfície do cubo, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$.

* **Resposta** : 1

(19) Utilize o **Teorema da Divergência** para calcular a integral de superfície $\displaystyle\int_S\int \overrightarrow{F}\cdot dS$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(x+y\ ,\ y-z\ ,\ xz)$ e S é a superfície do sólido limitado pelo cilíndro $x^2+y^2=1$ e pelos planos $z=0$ e $z=1$.

* **Resposta** : 2π

(20) Utilize o **Teorema da Divergência** para calcular a integral de superfície $\displaystyle\int_S\int \overrightarrow{F} \cdot dS$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^3\ ,\ y^3\ ,\ z^3)$ e S é a superfície da esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

* **Resposta** : $\frac{12\pi}{5}$

(21) Utilize o **Teorema da Divergência** para calcular a integral de superfície $\displaystyle\int_S\int \overrightarrow{F} \cdot dS$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^3\ ,\ 2xz^2\ ,\ 3y^2z)$ e S é a superfície do sólido limitado pelo parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ e pelo plano XY.

* **Resposta** : $\frac{729\pi}{2}$