CEFET/RJ - Cálculo a Várias Variáveis
Professor: Roberto Thomé
e-mail: roberto.thome@cefet-rj.br
homepage: www.rcthome.pro.br

LISTA DE EXERCÍCIOS 02

1) Resolva as integrais duplas:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_2^3 xy^2 \, dy \, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)cos(y) \, dy \, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (4 - x + y^2) \, dy \, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} (x + 2y) \, dy \, dx$

* **Respostas** : $(a)\ \frac{19}{6}$; $(b)\ 1$; $(c)\ \frac{23}{6}$; $(d)\ \frac{9}{20}$

2) Inverta a ordem de integração e resolva as integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} \, dx \, dy$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{sen(y)}{y} \, dy \, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{ye^{x^2}}{x^3} \, dx \, dy$

* **Respostas** : $(a)\ \frac{e-1}{2}$; $(b)\ 1 - cos(1)$; $(c)\ \frac{e-1}{4}$

3) Resolva a integral dupla abaixo, onde D é região delimitada pelo triângulo formado pelos pontos $A = (0, -1)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, 1)$:

$$\int_D \int 6x^2 \, dA$$

* **Resposta** : 1

4) Resolva a integral dupla abaixo, onde D é região delimitada pelo triângulo formado pelos pontos $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, 1)$:

$$\int_D \int (x + y) \, dA$$

* **Resposta** : $\frac{1}{3}$

5) Resolva a integral dupla abaixo, onde D é a região delimitada pelo triângulo formado pelos pontos $A = (0, -1)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, 2)$.

$$\int_D \int (x^2 + y^2) \, dA$$

* **Resposta** : 1

6) Resolva a integral dupla abaixo, onde D é a região delimitada pelas funções $y = x$ e $y = \sqrt{x}$.

$$\int_D \int x \cdot y \, dA$$

* **Resposta** : $\frac{1}{24}$

7) Suponha que uma lâmina ocupe uma região D do plano XY e que sua **densidade** (em unidades de massa por unidade de área) no ponto (x, y) em D é dada por $\rho(x, y)$, onde ρ é uma função contínua em D. Então, $m = \int_D \int \rho(x, y) dA$ é o valor da **massa** da lâmina. As coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ do **centro de massa** de uma lâmina ocupando a região D e tendo a função densidade $\rho(x, y)$ são $\overline{x} = \frac{1}{m} \int_D \int x\rho(x, y) dA$ e $\overline{y} = \frac{1}{m} \int_D \int y\rho(x, y) dA$. Considere uma lâmina que ocupa, no primeiro quadrante, a região D limitada pela parábola $x = 1 - y^2$ e pelos eixos coordenados, com a função densidade $\rho(x, y) = y$.

(a) Determine a **massa** da lâmina.

(b) Determine o **centro de massa** da lâmina.

* **Respostas**: $m = \frac{1}{4}$; $(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{1}{3}, \frac{8}{15})$

8) Resolva a integral dupla $\int_D \int (x^2 + y^2) dA$, onde $D = \{(x, y) \in \Re^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

* **Resposta**: $\frac{\pi}{2}$

9) Resolva a integral dupla abaixo, onde D é a parte do conjunto $\{(x, y) \in \Re^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ que está no **primeiro quadrante**:

$$\int_D \int x \, dA$$

* **Resposta** : $\frac{8}{3}$

10) Calcule $\int_D \int x^3 \, dA$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

* **Resposta** : $\frac{2}{15}$

11) Resolva a integral dupla $\int_D \int \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \, dA$, onde $D = \{(x, y) \in \Re^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$.

* **Resposta**: $4(\sqrt{10} - 1)\pi$

12) Resolva a integral dupla abaixo, onde D é a região do **primeiro quadrante** formada pelas duas circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$

$$\int_D \int \sqrt{x^2 + y^2} \, dA$$

* **Resposta** : $\frac{7\pi}{6}$

13) Resolva a integral dupla abaixo, onde D é a região formada pelas circunferências $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=16$

$$\int_D\int e^{-(x^2+y^2)}\ dA$$

* **Resposta** : $\left(\frac{e^{15}-1}{e^{16}}\right)\cdot\pi$

14) Considere que uma **carga elétrica** está distribuída sobre uma região D do plano XY e a **densidade de carga** em unidades de carga por unidade de área no ponto (x,y) em D é dada por $\sigma(x,y)$, então a **carga total Q** é dada por $Q=\int_D\int\sigma(x,y)dA$. Se uma carga elétrica está distribuída sobre o disco $x^2+y^2\le 1$, de modo que a densidade de carga em (x,y) é $\sigma(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a **carga total** no disco.

* **Resposta** : $\frac{2\pi}{3}C$

15) Resolva a integral dupla abaixo, onde $D=\{(x,y)\in I\!R^2\mid y\ge 0,\ 1\le x^2+y^2\le 9\}$.

$$\int_D\int 35x^4\cdot y\ dy\ dx$$

* **Resposta** : 4.372

16) Desenhe a região delimitada por $4\le x^2+y^2\le 9$ e $0\le x\le y\le\sqrt{3}\,x$. Utilize integral dupla para calcular a área dessa região.

* **Resposta** : $\frac{5\pi}{24}$

17) Resolva a integral dupla

$$\int_D\int x\sqrt{x^2+y^2}\ dA,$$

onde $D=\{(x,y)\in\Re^2\ \mid\ 4\le x^2+y^2\le 16, x\ge 0, y\ge 0\}$.

* **Resposta** : 60

18) Resolva a integral dupla abaixo

$$\int_D\int\frac{x\cdot y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dA,$$

onde $D=\{(x,y)\in\Re^2\ \mid\ 4\le x^2+y^2\le 16, x\ge 0, y\ge 0\}$.

* **Resposta** : 20

19) Resolva as integrais triplas:

a) $\displaystyle\int_0^1\int_2^3\int_{-1}^2 xy^2z\ dz\ dy\ dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^2\int_0^1 (x^2+y^2+z^2)\ dx\ dy\ dz$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \int_0^{x^2} xcos(y)\ dz\ dx\ dy$

d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2}\ dx\ dy\ dz$

* **Respostas** : $(a)\ \frac{19}{4}$; $(b)\ 8$; $(c)\ \frac{\sqrt{2}}{8}$; $(d)\ \frac{1}{4e}$

20) Se a **função densidade** (em unidades de massa por unidade de volume) no ponto (x, y, z) em uma região sólida E é dada por $\rho(x, y, z)$, então a sua **massa** é dada por $m = \displaystyle\int\int_E\int \rho(x, y, z)dV$. O **centro de massa** é o ponto $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, onde $\overline{x} = \frac{1}{m}\displaystyle\int\int_E\int x\rho(x, y, z)dV$, $\overline{y} = \frac{1}{m}\displaystyle\int\int_E\int y\rho(x, y, z)dV$ e $\overline{z} = \frac{1}{m}\displaystyle\int\int_E\int z\rho(x, y, z)dV$. Determine a **massa** e também o **centro de massa** do cubo E dado por $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$ e $0 \le z \le a$ com densidade dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

* **Respostas**: $m = a^5$; $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = (\frac{7a}{12}, \frac{7a}{12}, \frac{7a}{12})$

21) Calcule a integral tripla abaixo, onde E é o tetraedro sólido delimitado pelos quatro planos $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ e $6x + 2y + z = 6$.

$$\int\int_E\int \frac{z}{(3 - 3x - y)^2}\ dV$$

* **Resposta** : 3

22) Calcule a integral tripla abaixo, onde E é o tetraedro sólido delimitado pelos quatro planos $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ e $3x + y + z = 3$.

$$\int\int_E\int 6z^5\ dV$$

* **Resposta** : $\frac{2.187}{56}$

23) Calcule a integral tripla abaixo, onde E é o tetraedro sólido delimitado pelos quatro planos $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ e $6x + 2y + 3z = 6$.

$$\int\int_E\int 336z^5\ dV$$

* **Resposta** : 192

24) Calcule a integral tripla abaixo, onde E é o tetraedro sólido delimitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $4x + 6y + 3z = 12$.

$$\int\int_E\int x^2y\ dV$$

* **Resposta** : $\frac{6}{5}$

25) Calcule a integral tripla abaixo, onde E é o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ limitado pelos planos $z = 0$ e $z = 2$:

$$\int\int_E\int (x + y^2 - z)\ dV$$

* **Resposta** : $-\frac{3\pi}{2}$

26) Use uma integral tripla para calcular o volume do sólido contido no cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e limitado pelos planos $z = 1$ e $y + z = 5$.

* **Resposta** : 36π

27) Calcule o volume do sólido E contido entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ e limitado pelos planos $x + z = 7$ e $y + z = 3$.

* **Resposta** : 12π

28) Calcule a integral tripla abaixo, onde E é o sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $x + z = 3$ e $y + z = 7$.

$$\int\int_E\int y\sqrt{x^2 + y^2}\, dV$$

* **Resposta** : $-\frac{\pi}{5}$

29) Use uma integral tripla para calcular o volume do sólido compreendido entre os parabolóides $z = 5x^2 + 5y^2$ e $z = 6 - x^2 - y^2$.

* **Resposta** : 3π

30) Calcule a integral tripla

$$\int\int_E\int xyz\, dV,$$

onde $E = \{(x, y, z) \in \Re^3 \mid 3x^2 + 3y^2 \leq z \leq 36 - x^2 - y^2\}$.

* **Resposta** : 0 (*zero*)

31) Calcule a integral tripla

$$\int\int_E\int 60x^2yz\, dV,$$

onde $E = \{(x, y, z) \in \Re^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 32 - x^2 - y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

* **Resposta** : $\frac{2^{22}}{7}$

32) O divergente de um campo vetorial $\overrightarrow{F} = (\ P\ ,\ Q\ ,\ R\ )$ é um campo escalar definido por $div(\overrightarrow{F}) = \vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$. Se $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (3x + y + z\ ,\ x + 4y + 3z\ ,\ 2x - 2y - z)$ é um campo vetorial, então calcule a integral tripla $\displaystyle\int\int_E\int div(\overrightarrow{F})dV$, onde E é o sólido definido por $E = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$.

* **Resposta** : π

33) Calcule a integral tripla abaixo, onde E é o sólido delimitado pelo plano $z = 0$ e pela semiesfera $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

$$\int\int_E\int z\, dV$$

* **Resposta** : 4π

34) Use integral tripla para calcular o volume do sólido E delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pela semiesfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

* **Resposta**: $\frac{(2-\sqrt{2})}{3}\pi$

35) Use integral tripla para calcular o volume do sólido E delimitado pelo cone $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ e pela semiesfera $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

* **Resposta**: $9(2 - \sqrt{3})\pi$

36) Seja E a parte do sólido delimitado pelo cone circular $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ e pela semiesfera $z = \frac{1}{3}\sqrt{1 - 9x^2 - 9y^2}$ que está no primeiro octante. Encontre o valor da constante k de tal forma que a equação abaixo seja verdadeira:

$$\int\int_E\int \frac{kxyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dV = 1$$

* **Resposta** : 155.520

37) Seja E um planeta esférico de raio R cuja a densidade $\rho(x, y, z)$ em qualquer ponto é **inversamente proporcional** à distância ao centro do planeta. Determine a **massa** e também o **centro de massa** desse planeta.

* **Respostas**: $m = 2\pi R^2$; $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = (0, 0, 0)$

38) Calcule a integral tripla

$$\int\int_E\int cos\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}\, dV,$$

onde $E = \{(x, y, z) \in \Re^3 \ | \ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

* **Resposta**: $\frac{[sen(8) - sen(1)]\pi}{6}$

39) O ***valor médio*** de uma função contínua $f(x, y, z)$ num sólido E é definido como

$$f_m = \frac{1}{V_E}\int\int_E\int f(x, y, z)\, dV,$$

onde V_E é o volume do sólido E. Se $E = \{(x, y, z) \in \Re^3 \ | \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, então determine o valor médio da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ em E.

* **Resposta**: $\frac{3}{5}$

40) Calcule:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\; e^{-(x^2+y^2+z^2)}\, dx\, dy\, dz.$$

• Dica: A integral imprópria tripla é definida como o limite da integral tripla sobre uma esfera sólida quando o raio da esfera aumenta indefinidamente.

* **Resposta** : 2π